

数理計画法に基づく

旅客の観点から見た異常時列車運行計画の最適化

千種 健二* 古関 隆章 (東京大学)

佐藤 圭介 (財団法人 鉄道総合技術研究所)

A Passenger-Oriented Mathematical Programming Approach for An Optimization of Train Rescheduling

Kenji Chigusa*, Takafumi Koseki, (The University of Tokyo)

Keisuke Sato, (Railway Technical Research Institute)

Abstract

In highly-frequent railway transportation, once a disruption happens, delay propagates and causes big confusion. Then, rescheduling of train operation such as train reordering and interval adjustment is conducted by train dispatchers to restore the operation to its normal status. However, it is a quite difficult and burden task due to a complexity of operation and an absence of a quantitative evaluation. Consequently, a computer-aided rescheduling support system is strongly required.

Taking passenger flow into account, we present a Mathematical Programming approach for rescheduling. In this paper, train operation is modeled as a Mixed Integer Quadratic Programming (MIQP), and real-time approximative optimization methods focusing on passenger's loss time are examined. In this way, we could get a suitable rescheduling plan, utilizing several rescheduling methods together.

キーワード：鉄道、運転整理、数理計画、混合整数計画、旅客流動

(Railway, train rescheduling, mathematical programming, mixed integer programming, passenger flow)

1. はじめに

鉄道において、列車は綿密に定められた秒単位の運行計画（列車ダイヤ）にしたがって運行している。そのため、都市部などの高密度運行地域ではひとたび事故や災害などによる遅延が発生すると、広範囲に影響が及んでしまう場合がある。このとき、遅延の伝搬や混雑の発生を最小限にとどめるために行われる列車ダイヤの調整業務を、運転整理と呼ぶ。

この運転整理業務の多くは人間の手によって行われており、時々刻々と変わる状況に対して大規模な処理を迅速に行う必要があるため、鉄道事業者にとって大きな負担となっている。また、安全運行上の厳しい運行ルールや設備上の都合による数多くの制約を満たしつつ、様々な運転整理の手法を適切に組み合わせるのは非常に困難な作業であり、熟練指令員の経験と勘に依る部分が多いというのが現状である⁽¹⁾。このような背景から、計算機による運転整理支援システムの開発・導入が強く望まれている。

先行研究⁽²⁾では、旅客の行動モデルを仮定し、列車ダイヤを旅客の観点から定量的に評価する手法の研究が行わ

れてきた。これらの研究により、旅客が被る不利益に関して運転整理の巧拙を評価する枠組みは構築されつつあるが、指令員に対して適切な運転整理計画を提示する仕組みについては課題が多く残っている。運転整理計画の提示システムに関する研究では、迅速性の要求と問題の複雑さから、主に近似最適解を求めるための手法の検討が為されている。その一つのアプローチとして、確率的アルゴリズム等を取り入れたメタヒューリスティックと呼ばれる手法を用いるものが挙げられる⁽³⁾。しかし、これらの手法で得られる解には最適性の保証がないため、局所最適解に陥る可能性をはらんでいる。

本稿では、設定した評価指標について厳密に最適解が得られる数理計画法を用いたアプローチについて提案する。運転整理に整数計画法を適用した研究としては、列車の総遅延時間を評価指標に設定したものなどが挙げられるが⁽⁴⁾、前述したような輸送需要の大きい都市部のダイヤで運転整理を行う場合には、旅客流動を適切に考慮する必要がある。そこで、平常時の旅客の駅間移動（OD: Origin to Destination）情報を用いて列車待ち時間と目的地到着遅延

時間に関する簡易の目的関数を設定することで、迅速性を確保しながら旅客流動を間接的に考慮できる凸2次計画問題として定式化を行った。

第2章では列車運行の定式化及び目的関数の詳細について説明し、第3章において数値実験により本手法の有効性について検証を行う。

2. 問題の定式化

〈2・1〉 問題設定

複線区間における、普通列車と快速列車の2列車種別が混在する列車運行計画（列車ダイヤ）について考える。上記のダイヤにおいて、何らかの障害によって初期遅延が発生した際に、以降の最適な列車ダイヤを決定する。実際の業務では運転休止列車の決定や列車運用の変更なども併せて行われるが、ここでは待避変更、番線変更、番線利用順序変更などといった、列車の走行番線・順序を調整する運転整理手法と着発時刻変更のみを扱う。また、旅客は駅に均等に出現するものと仮定する。

このとき、機器や設備の性能上各列車が必ず満たさねばならない物理的制約条件、及び列車運行の運営上の都合により課される論理的制約条件を以下に示す。

【物理的制約】

- ① 各駅間の走行時間は定められた基準運転時分以上でなくてはならない
- ② 各駅での停車時間は定められた最小停車時分以上でなくてはならない
- ③ 各駅での進入・進出の際、先行列車との間隔は最小進入・進出時隔以上でなくてはならない
- ④ 単一番線上での追い抜きはできない
- ⑤ 各駅で同時に停車・通過できる列車数は、着発線数以内でなくてはならない

【論理的制約】

- ⑥ 計画時刻より早く出発してはならない
- ⑦ 同種別の列車間で追い抜きをしてはならない
- ⑧ 普通列車が快速列車を追い抜いてはならない

〈2・2〉 定式化

以下に本稿で用いる記号の定義を示す。

【記号の定義】

添え字 (indices)

s, o, d : 駅

j : 列車番号

q : 番線

集合 (sets)

S : 駅の集合

S_{loc} : 快速通過駅の集合

S_{rap} : 快速停車駅の集合

T : 列車の集合

T_{loc} : 普通列車の集合

T_{rap} : 快速列車の集合

Q_s : 駅 s における番線の集合

定数 (constants)

A_j^s : 駅 s における列車 j の計画着時刻

D_j^s : 駅 s における列車 j の計画発時刻

LS_j^s : 駅 s における最小停車時分

LR_j^s : 駅 $s \sim s+1$ 間の基準運転時分

LI_s^{arr} : 駅 s における最小進入時隔

LI_s^{dep} : 駅 s における最小進出時隔

LI^{track} : 番線開通時隔

$SD_{s,j}^{arr}$: 駅 s における j 列車の初期到着遅延

$SD_{s,j}^{dep}$: 駅 s における j 列車の初期出発遅延

P_s^{arr} : 駅 s における旅客到着数(/min)

P_s^{off} : 駅 s における旅客降車数(/min)

M : 十分に大きな定数

α : 不効用の重み

変数 (variables)

a_j^s : 駅 s における列車 j の着時刻

d_j^s : 駅 s における列車 j の発時刻

$x_{j,j'}^s := \begin{cases} 1 & \text{駅}s\text{において列車}j'\text{が列車}j\text{以降に発車する} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

$r_{j,q}^s := \begin{cases} 1 & \text{駅}s\text{において列車}j\text{が番線}q\text{を使用する} \\ 0 & \text{使用しない} \end{cases}$

〈2・2・1〉 変数

駅 s における列車 j の着発時刻に対応する変数をそれぞれ a_j^s, d_j^s とおく。また列車の順序関係を表すため、各列車間の前後関係(線形順序: \succeq)に対応する変数 x を、

$x_{j,j'}^s := \begin{cases} 1 & \text{駅}s\text{において列車}j'\text{が列車}j\text{以降に発車する} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

と定義する。

ここで、集合 T 上の線形順序 \succeq とは以下の定義を満たすものを指す。

- (a)反射律 $\forall j \in T, j \succeq j$
- (b)反対称律 $\forall j_1, j_2 \in T, (j_1 \succeq j_2) \cap (j_2 \succeq j_1) \Rightarrow j_1 = j_2$
- (c)推移律 $\forall j_1, j_2, j_3 \in T, (j_1 \succeq j_2) \cap (j_2 \succeq j_3) \Rightarrow j_1 \succeq j_3$
- (d)完備律 $\forall j_1, j_2 \in T, (j_1 \succeq j_2) \cup (j_2 \succeq j_1)$

さらに追い抜きの可否や番線の競合等を表現するため、駅 s における列車 j の番線利用の有無に対応する変数 r を、

$$r_{j,q}^s := \begin{cases} 1 & \text{駅}s\text{において列車}j\text{が番線}q\text{を使用する} \\ 0 & \text{使用しない} \end{cases}$$

と定義する。

〈2・2・2〉 制約条件

線形順序の定義より、 $x_{j,j'}^s$ が満たすべき条件は式(1), (2)で表される。

$$x_{j,j}^s = 1 \quad \forall s \in S, \forall j \in T \quad (1)$$

$$x_{j,j'}^s + x_{j',j}^s = 1 \quad \forall s \in S, \forall j, j' \in T: j \neq j' \quad (2)$$

ここで、 S, T はそれぞれ駅と列車の集合を表す。

同種別の列車間、及び普通列車による快速列車の追い抜きの禁止条件⑦、⑧は式(3),(4)で表される。また、式(5)によって一度追い抜かれた普通列車による抜き返しが禁止される。

$$x_{j,j'}^s = 1 \quad \forall s \in S, \forall j, j' \in T_{rap}: j \leq j' \quad (3)$$

$$x_{j,j'}^s = 1 \quad \forall s \in S, \forall j \in T, \forall j' \in T_{loc}: j \leq j' \quad (4)$$

$$x_{j,j'}^s \geq x_{j',j}^s \quad \forall s, s' \in S, \forall j \in T, \forall j' \in T_{loc}: s' = s + 1 \quad (5)$$

T_{loc}, T_{rap} はそれぞれ普通列車と快速列車の集合を表す。

次に、駅 s における列車 j の計画着発時刻をそれぞれ A_j^s, D_j^s としたとき、列車の早発禁止条件⑥は式(6)で表される。また、駅 s における列車 j の最小停車時分を LS_j^s 、駅 $s \sim s + 1$ 間における列車 j の基準運転時分を LR_j^s としたとき、走行、停車時分に関する条件①、②は式(7), (8)のように表現される。

$$d_j^s \geq D_j^s \quad \forall s \in S, \forall j \in T \quad (6)$$

$$d_j^s - a_j^s \geq LS_j^s \quad \forall s \in S, \forall j \in T \quad (7)$$

$$a_j^{s'} - d_j^s \geq LR_j^s \quad \forall s, s' \in S, \forall j \in T: s' = s + 1 \quad (8)$$

同様に、駅 s における最小進入時隔と最小進出時隔をそれぞれ LI_s^{arr}, LI_s^{dep} としたときの最小進入・進出時隔条件③は、式(9), (10)によって表される。

$$a_j^{s'} - a_j^s \geq LI_s^{arr} - M(1 - x_{j,j'}^s)$$

$$\forall s, s' \in S, \forall j, j' \in T: s' = s + 1, j \neq j' \quad (9)$$

$$d_j^{s'} - d_j^s \geq LI_s^{dep} - M(1 - x_{j,j'}^s)$$

$$\forall s \in S, \forall j, j' \in T: j \neq j' \quad (10)$$

また、駅 s の番線集合を Q_s 、番線開通時分を LI^{track} としたとき、式(11)によって各列車の使用する番線は一意に定められ、番線設備上の制約条件⑤は式(12)で表される。

$$\sum_{q \in Q_s} r_{j,q}^s = 1 \quad \forall s \in S, \forall j \in T \quad (11)$$

$$a_j^{s'} - d_j^s \geq LI^{track} - M(3 - x_{j,j'}^s - r_{j,q}^{s'} - r_{j',q}^s)$$

$$\forall s, s' \in S, \forall j, j' \in T, \forall q \in Q_s: s' = s + 1, j \neq j' \quad (12)$$

最後に、駅 s において列車 j の計画着発時刻に加わる初期遅延時分をそれぞれ $SD_{s,j}^{arr}, SD_{s,j}^{dep}$ としたとき、初期遅延に起因する制約条件はそれぞれ式(13), (14)に示される。

$$a_j^s - A_j^s \geq SD_{s,j}^{arr} \quad \forall s \in S, \forall j \in T \quad (13)$$

$$d_j^s - D_j^s \geq SD_{s,j}^{dep} \quad \forall s \in S, \forall j \in T \quad (14)$$

〈2・2・3〉 目的関数

運転整理計画の作成に要求される迅速性を満足させるためには、計算量を抑えた上で旅客流動を考慮しなければならない。また、ダイヤ乱れによって、旅客は混雑や乗り継ぎ回数の増加などの様々な不効用を被るが、最もその度合が大きいのは待ち時間を含む旅行時間の増大であると考えられる。

そこで、平常時の旅客の駅間移動情報 (OD データ) を用いた簡易の目的関数を設定する。ここでは旅客が列車に乗車するまでの待ち時間と、目的駅への到着遅延時間を評価基準に用いる。具体的には、全ての旅客が被る不効用の総和を D とし、以下の二つの不効用の重み付け線形和として記述する。

(1) 目的地着遅延に関する不効用

平常時の駅 s における単位時間あたりの旅客降車数(/min)を P_s^{off} として与え、計画着時刻からの遅延時分との積分値を、旅客が列車の遅延によって被る不効用の近似値として設定する。このとき、全ての旅客が被る目的値着遅延不効用 D_1 は以下のように表される。

$$D_1 = \sum_{s \in S_{rap}} \sum_{j \in T} P_s^{off} \int_0^{a_j^s - A_j^s} t dt + \sum_{s \in S_{loc}} \sum_{j \in T_{loc}} P_s^{off} \int_0^{a_j^s - A_j^s} t dt$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s \in S_{rap}} \sum_{j \in T} P_s^{off} (a_j^s - A_j^s)^2 + \frac{1}{2} \sum_{s \in S_{loc}} \sum_{j \in T_{loc}} P_s^{off} (a_j^s - A_j^s)^2$$

ただし、 S_{loc}, S_{rap} はそれぞれ快速通過駅と快速停車駅の集合である。第 1 項は快速停車駅での全列車の遅延不効用を、第 2 項は快速通過駅での普通列車のみの遅延不効用を表している。

(2) 旅客待ち時間に関する不効用

平常時の駅 s における単位時間あたりの旅客出現数(/min) を P_s^{arr} として与え、前後の同種別列車間の出発間隔との積分値を旅客が被る不効用とする。また、ここでは暫定的に快速停車駅における各列車種別の利用率を 1:1 として考える。このとき、全ての旅客が被る待ち時間不効用 D_2 は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \sum_{s \in S_{loc}} \sum_{\substack{j, j' \in T_{loc} \\ :j'=j+2}} P_s^{arr} \int_0^{d_{j'}^s - d_j^s} t dt \\
 &\quad + \sum_{s \in S_{rap}} \sum_{\substack{j, j' \in T_{loc} \\ :j'=j+2}} \frac{1}{2} P_s^{arr} \int_0^{d_{j'}^s - d_j^s} t dt \\
 &\quad + \sum_{s \in S_{rap}} \sum_{\substack{j, j' \in T_{rap} \\ :j'=j+2}} \frac{1}{2} P_s^{arr} \int_0^{d_{j'}^s - d_j^s} t dt \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{s \in S_{loc}} \sum_{\substack{j, j' \in T_{loc} \\ :j'=j+2}} P_s^{arr} (d_{j'}^s - d_j^s)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sum_{s \in S_{rap}} \sum_{\substack{j, j' \in T_{loc} \\ :j'=j+2}} P_s^{arr} (d_{j'}^s - d_j^s)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sum_{s \in S_{rap}} \sum_{\substack{j, j' \in T_{rap} \\ :j'=j+2}} P_s^{arr} (d_{j'}^s - d_j^s)^2
 \end{aligned}$$

第 1 項は快速通過駅での普通列車の待ち時間不効用を、第 2、3 項は快速停車駅での普通列車と快速列車の待ち時間不効用を表している。

(3) 全ての旅客が被る不効用の総和の最小化関数

(1)、(2)より、目的関数は各不効用の重み α を用いて以下のように表現され、凸二次混合整数計画問題として定式化される。

$$\begin{aligned}
 \text{minimize: } D &= \alpha D_1 + (1 - \alpha) D_2 \\
 \text{subject to: } &\text{式(1)~(14)}
 \end{aligned}$$

D_1 を目的関数に入れることで、各列車は旅客の被る着遅延不効用を軽減するべく列車順序や番線を変更して運行し、回復運転が促される。また、 D_2 を目的関数に入れることで、

各駅での旅客の列車待ち時間が増大しすぎないように列車の発時刻が調整される。

したがって、この凸二次混合整数計画問題を解くことにより、輸送需要に応じた速達性の確保及び列車間隔の平準化がなされると考えられる。

3. 数値実験

〈3・1〉出力ダイヤの検証

仮想的な路線及びダイヤを設定し、数値実験により本手法の有効性について検証を行った。

基本となる駅数 7 列車数 12 の仮想ダイヤを図 1 に示す。快速列車の停車駅は駅 1, 3, 5, 7 であり、駅 1 の発順が早い列車からそれぞれ列番を 1~12 まで与えるものとする。また、設定した 1 分あたりの仮想 OD データを表 1 に示した。OD データは本来整数で与えられるが、ここでは 1 時間あたりのデータを 1 分あたりに変換して算出しているため、実数で与えている。

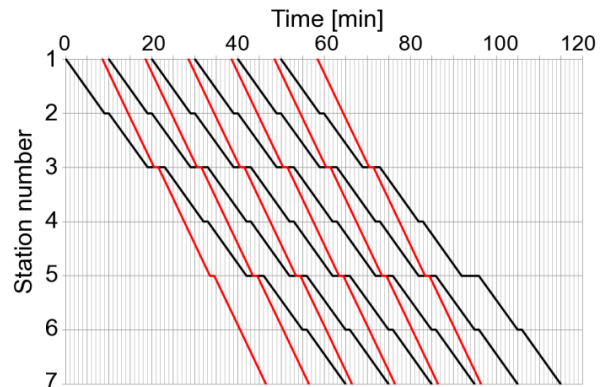


図 1 仮想ダイヤ (黒線：普通、赤線：快速)

Fig. 1. A model diagram.

表 1 仮想 OD データ (1 分あたり)

Table 1. A model OD data per min.

| | a | b | c | d | e | f | g |
|---|------|------|------|------|------|------|------|
| a | 0.00 | 1.00 | 1.33 | 1.33 | 2.67 | 2.67 | 1.67 |
| b | 0.00 | 0.00 | 0.10 | 0.10 | 0.33 | 0.33 | 0.13 |
| c | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.17 | 0.43 | 0.43 | 0.20 |
| d | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.43 | 0.43 | 0.20 |
| e | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.90 | 0.57 |
| f | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.57 |
| g | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |

ここで、 $\alpha=0.5$ とおき、列番 3 列車の 2 駅到着に対して 600 秒の遅延を与えた際の最適化前後のダイヤを図 2 に示

した。例えば駅 2 では、列番 3, 4 の列車順序が変更されることで、列番 4 の快速列車に伝搬していた遅延が解消している事がわかる。また、駅 4 では列番 1 の普通列車、駅 5 では列番 2 の快速列車についてそれぞれ時隔調整が行われている。これらの結果から、障害に応じて列車順序及び列車間隔が適切に調整されていることが確認された。

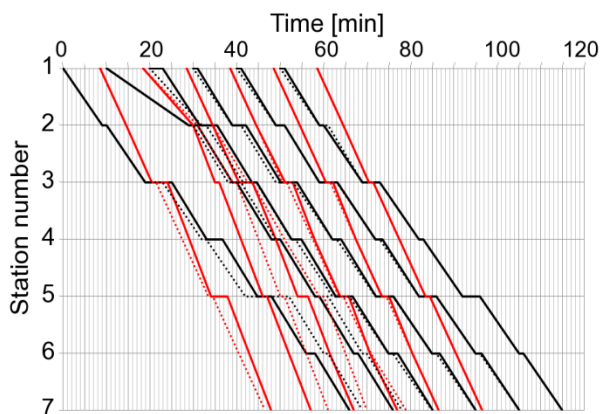


図 2 最適化前後のダイヤ比較
(実線：最適化後、点線：最適化前)

Fig. 2. A comparison of optimized diagrams.

次に、OD の値を変化させたときの最適化後ダイヤの傾向を調べるため、1 駅発の値を 1/10 にしたところ図 3 に示したダイヤが得られた。元のダイヤとの大きな差異は認められないが、わずかながら 1 駅からの速達性よりも時隔調整が強調されていることがわかる。

加えて、 $\alpha=0.1$ とおいたときのダイヤを図 4 に示した。こちらは、より時隔調整が強調されており、それぞれの目的関数の重み付けが出力ダイヤに大きく影響を及ぼすことが確認できた。

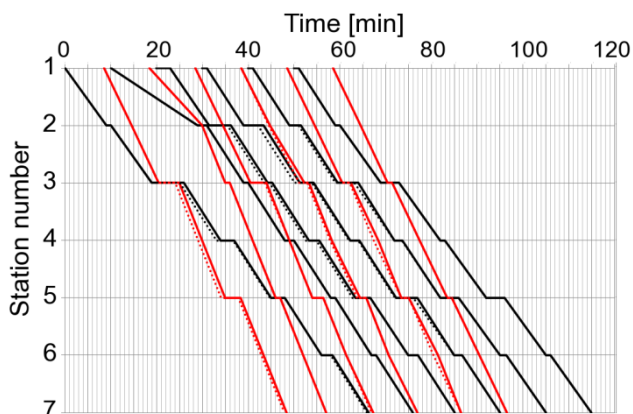


図 3 OD 変更前後のダイヤ比較
(実線：OD 変更時、点線：OD 変更前)

Fig. 3. A comparison of OD-changed diagrams.

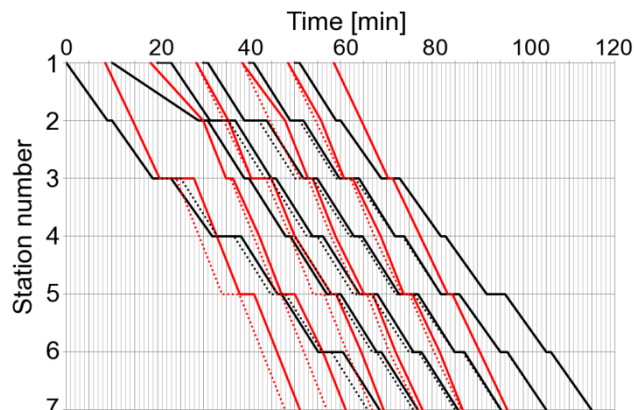


図 4 重み付け α 変更前後のダイヤ比較
(実線：変更後、点線：変更前)

Fig. 4. A comparison of α -changed diagrams.

〈3・2〉 計算時間

本モデルは、制約数が【駅数】×【列車数の 3 乗】のオーダー、変数が【駅数】×【列車数の 2 乗】のオーダーとなっている。異常時列車ダイヤの作成には迅速性が求められるため、問題の規模を変化させたときの計算時間について検証を行った。凸二次計画問題の求解には、2 章の定式化に基づき、数理計画問題を解くパッケージである CPLEX を利用した⁶⁾。また、計算にはデュアルコア、CPU: 3.0 GHz、メモリ: 8.0GB の PC を用いた。

駅 4 において、列番 3 の普通列車の着時刻に対して 600, 1200, 1800 秒の遅延を与えた際の計算時間を表 1 に示した。ここから、モデルの規模、及び遅延の規模の増大によって、計算時間が増加していることが確認できる。また、駅数 7、列車数 12 以下の規模では、数秒~20 秒程度で解が求まっており、十分実用的な水準であるといえる。実際には、乱れの種類やダイヤのパターンなどによっても計算時間は変化するため、より多くのケースでの検証が必要だと考えられるが、この結果からは本手法の有効性を確認することができた。

表 2 計算時間

Table 2. Calculation time.

| No. of (St., Tr.) | CPU time[sec] | | |
|-------------------|---------------|------------|------------|
| | Delay=600 | Delay=1200 | Delay=1800 |
| (5,6) | 0.06 | 0.11 | 0.06 |
| (5,8) | 0.12 | 0.22 | 0.59 |
| (5,10) | 0.23 | 0.58 | 1.78 |
| (5,12) | 2.23 | 1.97 | 2.89 |
| (7,6) | 0.17 | 0.11 | 0.16 |
| (7,8) | 0.23 | 0.88 | 0.98 |
| (7,10) | 0.52 | 2.52 | 6.34 |
| (7,12) | 0.95 | 3.5 | 21.28 |

4. まとめ

旅客の観点から見た運転整理計画の最適化問題について、列車間の順序関係と番線使用の有無を 2 値の決定変数にとり、平常時の OD データを用いて凸 2 次計画問題として定式化を行った。目的関数に旅客が列車に乗車するまでの待ち時間と、目的駅への到着遅延時間の最小化関数を設定したことで、輸送需要に応じた速達性の確保及び列車間隔の平準化が為されたダイヤが得られた。

また、本手法により、メタヒューリスティクスなどの大域的最適化手法では得られない、最適性の保証を持った運転整理計画を作成することが可能となった。一定規模の問題であれば実用的な時間で解が得られることも確認された。

しかし、本稿では旅客の流動について時間平均データを用いて間接的に考慮しているため、実際の旅客流動から考えると非合理的な運転整理が行われてしまう可能性がある。これらの可能性を排除し、より厳密に旅客にとって最適な運転整理計画を作成するためには、一定数の旅客の単位毎に行動を規定し、全ての旅客が要する総旅行時間についての評価を行う必要があると考えられる。

そこで、現在は旅客の駅到着事象を離散時間的に与え、数分単位で旅客をグループ化して扱うことで、旅客行動を線形式で表現した総旅行時間最小化線形計画問題としての定式化に取り組んでいる。このとき、旅客の粒度を上げることで最適解の精度向上が見込まれるが、同時に計算量が飛躍的に増加する背反関係にあるため、適切な粒度を設定すると共に、問題のサイズを縮小するための検討が必要となる。こちらの定式化および最適化結果の具体的な内容については、稿を改めて報告する。

文 献

- (1) (財) 鉄道総合技術研究所 運転システム研究室: 「鉄道のスケジューリングアルゴリズム」, NTS, pp1-194 (2005)
- (2) S. Tanaka, K. Kumazawa, and T. Koseki: "Passenger Flow Analysis for Train Rescheduling and Its Evaluation", International Symposium on Speed-up, Safety and Service Technology for Railway and Maglev Systems (2009)
- (3) 竹内友章, 安藤秀樹, 島田俊夫, 松崎元昭: 「遺伝的アルゴリズムを用いた列車運転整理ダイヤの作成」, 交通・電気鉄道研究会, TER-02-1 (2002)
- (4) 國松武俊, 平井力, 村木国満, 高場基司: 「旅客の流動と評価に基づく運転整理案作成アルゴリズム」, 交通・電気鉄道研究会, TER-08-15 (2008)
- (5) 安部恵介, 荒谷真二: 「分枝限定法を用いた列車順序最適化手法」, 計測自動制御学会論文集, Vol. 21, No. 5 (1985)
- (6) <http://www-06.ibm.com/software/jp/websphere/ilog/optimization/core-products-technologies/cplex/>