

## 動的計画法を用いた列車運転曲線最適化問題の求解法

学生員 高 英聖\* 正員 古関 隆章\*\*  
正員 宮武 昌史\*

Numerical Study on Dynamic Programming Applied to Optimization of  
Running Profile of a Train

KO Hideyoshi\*, Student Member, KOSEKI Takafumi\*\*, Member, MIYATAKE Masafumi\*, Member

An algorithm optimizing train running profile with Bellman's Dynamic Programming(DP) is investigated in this paper. Optimal running trajectory of a train which minimizes amount of total energy consumption has been produced under fixed origin and destination, stipulated running time and various track profile. Many previous works on this area adopt the numerical techniques of calculus of variations, Pontryagin's maximum principle, and so on. But these methods often meet some difficulties accounting for complicated actual train running preconditions, *e.g.* complicated functions which describe electrical motive/brake torque, local constraints of the state variable as speed limitations, non-linear running resistance and variable grade profiles. Basic numerical DP algorithm can cope with such complicated conditions and give the globally optimal solution. But this method consumes too large computation time for practical uses. We have made the improvements for shorter calculation time of whole optimization process and reducing the numerical error. The confined state space and irregular lattice play most important role for them. Dynamic meshing and effective utilization of system memory also realize shorter computation time. The effectiveness of the proposed method is demonstrated using various complicated running conditions.

キーワード：列車運転制御，最適化，動的計画法，省エネルギー，速度制限，列車抵抗

**Keywords:** Train operation control, optimization, dynamic programming, energy-saving, speed limitation, running resistance

### 1. はじめに

エネルギー消費の小さな電気鉄道は、今後も大量輸送機関としての重要な役割を担うことが期待される。電気鉄道でさらなるエネルギー消費の削減を目指す場合、所要時間、運賃、混雑度の増大をなるべく避けて、他交通機関への乗客の移行を防ぐ必要がある。

省エネルギー化の手法には、ハードウェアの改善など様々あるが、ここでは列車の駅間での運転曲線を最適化することを取り上げる。鉄道のダイヤは、最小の駅間走行時分に遅延回復のための余裕時分が上乘せされており、平常運転

時には、駅間における余裕時分の最適な配分による省エネルギー運転が実現できる。発展著しい情報技術・デジタル制御技術の導入により、運転士への最適運転の支援、さらに進んでドライバレス運転が可能となれば、現時点では運転士の技術によって大きく異なる列車消費エネルギー量を削減できるとされている<sup>(1)</sup>。この方法による省エネルギー化は上記の要件を満たすものである。

最適運転の定性的条件は次の2つである。

- (1) 速度のピークを下げ、走行抵抗による損失を下げる
- (2) モータに電流を流さない惰行を活用する

単純な条件では最大加速、惰行、最大減速が上記を満たす解となるが、条件が複雑だと定速やそれ以外の運転も加わる可能性があり、最適化には数値的解法が不可欠である。従来の列車消費エネルギー最小化問題に関する研究は、抵抗制御による直流電動機を用い、ブレーキ時に電力を回生しない車両を対象にしており、電力回生ブレーキと機械ブレーキとを併用する近年の列車に従来の手法を適用することは困難を伴う<sup>(2)</sup>。近年、回生車を対象とした研究も行われているが<sup>(3)(4)</sup>、変分計算あるいは最大原理に基づいた手

\* 上智大学電気電子工学科

〒102-8854 東京都千代田区紀尾井町 7-1  
Dept. of Electrical & Electronics Eng., Sophia University  
7-1, Kioicho, Chiyoda-ku, Tokyo 102-8854

\*\* 東京大学情報理工学系研究科

〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1  
Graduate School of Information Science and Technology, The  
University of Tokyo  
7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656

法によっており、複雑な電動機トルク特性、複数の速度制限・勾配抵抗を含む現実に近い問題の求解に困難を生じる。Khmelnitsky の提案手法<sup>(4)</sup>は、この点で優れたものだが、数値例が比較的単純な路線プロファイルへに限定されており、現実の複雑な条件への適用の可否が不分明である。

本稿で用いた動的計画法は、離散制御入力や不連続関数を含むような非常に複雑な問題でも、Bellman の最適性条件<sup>(5)(6)</sup>に基づく単純なアルゴリズムの適用により、大域的最適解が得られるという他の方法にはない大きな利点を持つ汎用的な計算手法である。その反面、最適解を求めるのに膨大な時間を要するのが最大の欠点で、最適制御問題の数値解法として用いる場合、何らかの効率的解法の開発が必須である。

本稿では、饋電回路を含めない場合において、一列車の運動方程式を対象とした列車消費エネルギー最小化問題を最適制御問題として定式化する。R.Bellman の最適性原理を考慮しながら、以下に述べる 2 つの方法を主とした効率的解法を提案し、実路線への適用が可能で実用性の高い最適運転曲線の求解法を確立する。

- (1) 許容状態空間制限と不均一メッシュで計算量削減
- (2) 時間を陽に含まない状態方程式の求解を 1 回のみに

2. 列車最適制御問題の定式化<sup>(7)(8)</sup>

2.1 列車運動方程式 一列車の運動方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{dx}{dt} = v \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = f(u, v) - r(x, v) \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $x[m]$ 、 $v[m/sec]$  はそれぞれ列車位置・速度を表し、 $t[sec]$  は経過時間である。また、関数  $f(u, v)[m/sec^2]$  は、各定格電圧値における、モータトルクおよび機械ブレーキによる加速・減速度を<sup>(9)</sup>、 $r(x, v)[m/sec^2]$  は走行抵抗・勾配抵抗等<sup>(10)</sup>を含む列車抵抗による減速度を表している。制御入力  $u$  は、現行列車におけるノッチ数（離散値）でも計算可能だが、今回は、自動制御運転を視野に入れた定式化として、連続値をとるものとしている。また  $u$  の値は、表 1 に示すように、力行・制動を判別でき、その大きさが最大出力トルクに対する比を表すように定めた。

2.2 評価関数 列車の総消費エネルギーを評価値としたとき、電動機効率が重要な要素となるが、その特性

は、モータ電圧・電流、あるいはその簡略形としてモータの回転数・トルクを因子とする複雑な関数で得られる。これは、動的計画法による求解可能性を損なうものではないが、正確な定式化が困難である。故に、今回は電動機効率を単純化し、力行と回生のみを区別し、それぞれ、力行時電動機効率  $M_e$ 、制動時電動機効率  $G_e$  と定めれば、消費エネルギー総量にあたる評価汎関数  $J[u]$  は (3) 式となる。但し、 $m[kg]$  は列車総重量、 $T[sec]$  は指定走行時分を表す。

$$J[u] = \int_0^T p(u, v) dt = \begin{cases} \int_0^T 1/M_e \cdot m f_e(u, v) v dt & (f_e(u, v) v \geq 0) \\ \int_0^T G_e \cdot m f_e(u, v) v dt & (f_e(u, v) v < 0) \end{cases} \quad (3)$$

ここで、関数  $f_e(u, v)$  は、遅れ込み制御を想定した電動機負担分加速・減速度であり、(2) 式における減速度から、機械ブレーキ負担分を減じたものと等しい。

2.3 最適制御問題としての定式化 前節、および前々節の議論から、駅間距離  $L[m]$  を指定時分  $T[sec]$  で走行する列車の消費エネルギー最小化問題は、(4) 式的最適制御問題と等価である。

$$\begin{aligned} & \min_{u \in [0,9]} J[u] \\ & \text{subj. to equations (1), (2)} \\ & x(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad x(T) = L, \quad v(T) = 0 \\ & C(x, v) \leq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

問題 (4) は、一般に求解が困難とされる、状態制約拘束条件を付帯条件として持つ最適制御問題である。ここで、 $C(x, v)$  は、速度制限を表す関数であり、通常運転時には列車位置によって定まる最大許容速度  $v_{max}(x)$  を用いて、 $C(x, v) = v - v_{max}(x)$  で定まる。

2.4 多段階決定問題への変換 一般に、最適制御問題の求解に動的計画法を用いる際には、離散時間における多段階決定問題へと変換する必要がある。また、動的計画法を応用した求解法では、終端状態量拘束条件を直接扱うことが困難であるため、ペナルティ法を用いて対象となる最適制御問題を終端状態量自由問題へと変換することが必要となる。終端条件に対する外点ペナルティ定数  $c_1, c_2$  を用いると、離散系に変換された評価値  $\tilde{J}[u]$  は (5) 式で与えられる。ここで、 $N$  は総ステージ数、 $\Delta t$  は時間刻みを表し、 $(N - 1)\Delta t = T$  の関係がある。

表 1 制御入力  $u$  の定義

Table 1. Definition of Control input  $u$

| control input $u$ | traction mode        |
|-------------------|----------------------|
| $u = 0$           | maximum acceleration |
| $0 < u < 4$       | acceleration         |
| $u = 4$           | coasting             |
| $4 < u < 9$       | deceleration         |
| $u = 9$           | maximum deceleration |

$$\begin{aligned} \tilde{J}[\{u_k\}] &= \phi(x_N, v_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t(p(u_k, v_k) + p(u_k, v_{k+1})) \\ \phi(x_N, v_N) &= c_1(x_N - L)^2 + c_2 v_N^2 \\ p(u_k, v_k) &= \begin{cases} 1/M_e \cdot m f_e(u_k, v_k) v_k & (f_e(u_k, v_k) v_k \geq 0) \\ G_e \cdot m f_e(u_k, v_k) v_k & (f_e(u_k, v_k) v_k < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

次に、非線形状態方程式の局所線形化を行う。列車運動方程式(1)(2)を、任意の点  $(x_0, v_0)$  の周りで Taylor 展開すると(6)式の線形微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= A\psi(t) + Bf_0(u, x_0, v_0) \dots \dots \dots (6) \\ \psi(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f_0(u, x_0, v_0) &= f(u, v_0) - r(x_0, v_0) \\ &+ x_0 r_v(x_0, v_0) + v_0(r_v(x_0, v_0) - f_v(x_0, v_0)) \\ \alpha &= f_v(x_0, v_0) - r_v(x_0, v_0), \quad \beta = -r_x(x_0, v_0) \end{aligned}$$

(6)を台形積分近似により離散化し(5)とまとめると、元問題の近似問題としての離散時間多段階決定問題が、(7)式のように得られる。

$$\begin{aligned} \min_{\{u_k\}} & \tilde{J}[\{u_k\}] \\ \text{subj. to} & \\ \psi_k &= (I - \frac{\Delta t}{2} A)^{-1} \{ (I + \frac{\Delta t}{2} A) \psi_{k-1} + B f_0 \Delta t \} \\ C(\psi_k) &\leq 0, \quad 0 \leq u_k \leq 9 \end{aligned} \quad (7)$$

多段階問題への変換過程において、状態方程式の局所線形化は、動的計画法による数値解法の適用において、必須用件ではないが、最適解の精度悪化を招くことなく、計算量を低減する上で無視し得ない。

3. 提案法<sup>(11)</sup>

3.1 動的計画法と Bellman の最適性条件<sup>(5)(6)</sup>

動的計画法は、R.Bellman によって提案された最適化問題の解法の一つであり、問題に微分可能性などの特別な条件を必要としない適用範囲の広い手法である。中でも、下に掲げる Bellman の最適性原理は、動的計画法による数値解法の基礎をなす最重要定理である。

〔原理 1〕(Principle of Optimality) 最適政策は、最初の状態および最初の決定が何であっても、残りの決定は最初の決定から生じる状態に関して最適政策を構成しなければならないという性質を持つ<sup>(6)</sup>。

最適性原理は、動的計画法による基本アルゴリズムおよび効率解法の基礎となる。最適性原理を最適制御問題に適用すると、以下の簡潔な数値計算アルゴリズムを得る。

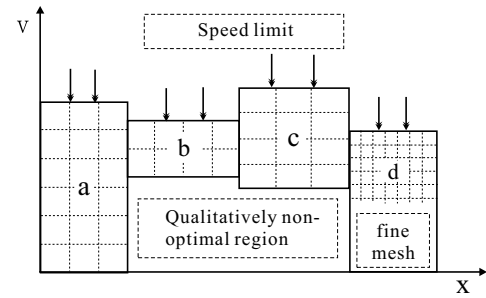


図 1 状態空間の空間的制限と不均一分割

Fig.1. Confined state space and nonuniform spacing

- (a) 状態空間を格子状に分割すると同時に、与えられた最適制御問題を  $N$  段階決定問題へと変換する。
- (b) 時間ステップ数  $k$  を  $k = N - 1$  と定める。
- (c) 状態空間の各格子点で、 $k + 1$  段階における部分評価値をもとに最適な制御入力決定する。
- (d) 時間を遡行し、ひとつ前の時間ステップへと移る。 $k \neq 0$  であれば、(b) へ戻る。
- (e)  $k = 0$  から  $k = N$  へ向かって時間順に、各時間における最適制御入力をたどれば、最適化結果が得られる。

最適制御問題を考えた場合、動的計画法による数値解法がもつ利点は主に2つである。ひとつは、他の変分理論や最大原理による方法と異なり、大域的最適解が得られることであり、ほかは、目的関数制御入力や状態方程式右辺の関数に連続性・微分可能性を必要としないことである。但し、上記の単純な方法では膨大な計算時間を要するため、実際にあたっては何らかの効率解法の確立が不可欠である。

3.2 終端境界条件充足のための対策 前章に示したように、与えられた問題を動的計画法によって求解可能とするためには、終端状態量拘束問題をペナルティ法によって、終端状態量自由問題へと変換する必要がある。これによるペナルティパラメータの調整が、最適解に無視しえない影響を与えることが指摘されている<sup>(7)(8)</sup>。これを完全に排除することは困難であるが、終端付近の分割幅を小さくすることによって、均等分割時と比較して改善が可能である<sup>(12)</sup>。これには計算量の増大を伴うが、ペナルティパラメータの調整を複数回行うことを考慮すれば、実際の計算時間は短くなる。終端付近を定性的考察から最大減速区間として与えることは終端点の移動に相当し、与えた解と計算した解との整合性に問題が生ずる為、改善策たりえない。

3.3 状態空間の制限 計算時間増大を抑制するためには、対象状態空間を制限する手法が有効であり、次の空間的制限および時間的制限の2種に大別できる。状態変数不等式制約は、変分法や最大原理による方法においては一般に取り扱いが困難とされるが、動的計画法によれば、対象となる状態空間が狭くなることから、アルゴリズムの効率化に有利な条件となる。また、極端に低い速度制限がなければ、始点・終点間での低速域は存在しないとの直観的



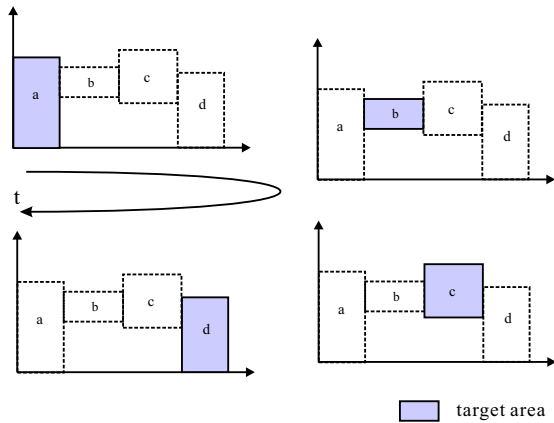


図 2 許容状態空間の時間的变化  
Fig. 2. Time-dependent admissible region

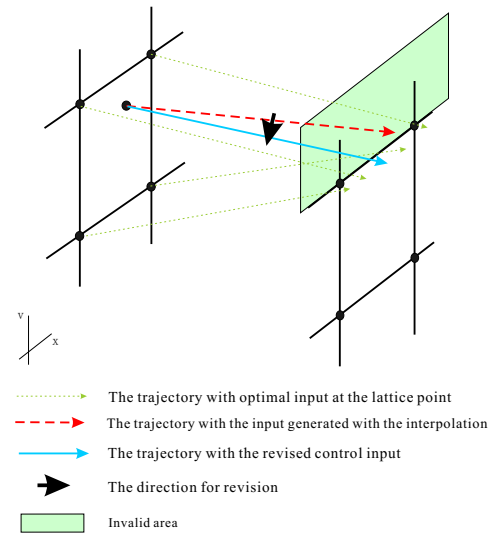


図 3 軌道の修正  
Fig. 3. Revision of trajectory

考察から、対象領域を 図 1 のように限定できる。これは、時間的要因に左右されないという意味で空間的制限であるということができる。さらに、十分な時間が経過したとき始点の周囲に列車が存在するとは考えにくく、また出発直後から終点付近に列車は存在し得ない。これより、対象状態空間を図 2 のように時間変化させることで、必要計算量低減が可能である。これは、経過時間による定性的考察から許容領域に変化を与える時間的制限といえる。空間的制限と異なり、時間的制限を効果的に指定するには何らかの経験を要するが、提案法においては、図 1 にみられるような終端付近を細かく分割した状態空間を用いるので、格子点の密度が高い終端付近の領域を用いるステージ数を指定するだけで、さほどの困難を伴わずに、高い計算量削減効果を上げることができる。

**3.4 許容解の生成** 動的計画法による最適制御問題の求解では、全格子点における最適制御入力を決定後、初期状態から最適制御入力をたどりつつ終端へと向かうが、補間計算により最適制御入力を得るため、極端に低い速度制限などが存在すると、 $t = 0$  からの探索時に、図 3 のように運転曲線が状態変数不等式制約にかかり、解が許容軌道でなくなる場合がある。故に、速度制限が厳しい問題において許容解を得るために、各時間ステップにおいて、補間により得られた解を次のように修正する。

- (a) 補間により得られた制御入力を用いて次段階における状態を得る。(通常フェーズ)
- (b) 許容解であるかのチェックを行い、許容解であるならば次の段階における状態を得る。許容解でない場合には、ブレーキ力を微増する。(修正フェーズ)

この修正法は、解の精度の悪化を招かない。というのも、各格子点で既決の最適制御入力が等しいと仮定するならば、ある点における制御入力によって得られた解が許容解でない場合、それは補間計算によって誤差が生じたことを意味するからである。これにより、実際の複雑な路線状況においても、提案手法は、非常に安定的に最適解を得られる特長を有することになる。

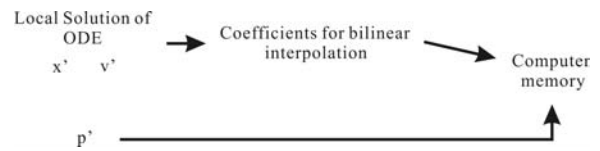


図 4 メモリの有効利用による計算時間の短縮  
Fig. 4. Effective utilization of system memory for shorter computation time

**3.5 メモリ活用による計算量の低減** 2. で定式化した最適制御問題は、その状態方程式の右辺に時間を陽に含めないという大きな特徴を有する。本問題に限らず、このような特質を有する最適制御問題を、動的計画法により解く場合には、計算機メモリの有効活用により、大幅な計算時間の短縮を実現できる。すなわち、制御入力の探索点をあらかじめ定めておけば、図 4 に示すように、アルゴリズム内で必要となる部分評価値及び補間計算に用いる係数を記憶することにより、各格子点における状態方程式の求解を 1 回に抑えることが可能となり、大幅な計算量低減を実現できる。これは、上に述べたような性質をもつ最適制御問題に対して、汎用性の高い強力な手法である。

4. 数値例

本章においては、単純なケースおよび実路線に近い複雑な路線プロファイルにおける最適化計算を行い、提案手法による計算効率改善を検証し、複雑な条件下においても確実に解が得られることを確認する。最適化計算にあたっては、乗車率 250% の混雑した列車を想定し、列車総重量 578[t]、列車総長 200[m]、力行時電動機効率 91.7%、制動時電動機効率 84.9% と定めた。また、計算に用いた列車トルク特性ならびに走行抵抗を図 5 に与える。

**4.1 単純な路線プロファイルへの応用** 指定時分  $T = 80[\text{sec}]$ 、駅間距離  $L = 1000[\text{m}]$  の速度制限も勾配も

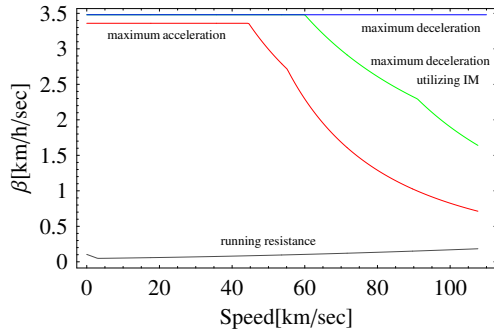


図 5 列車加速特性

Fig. 5. The acceleration characteristics of the train

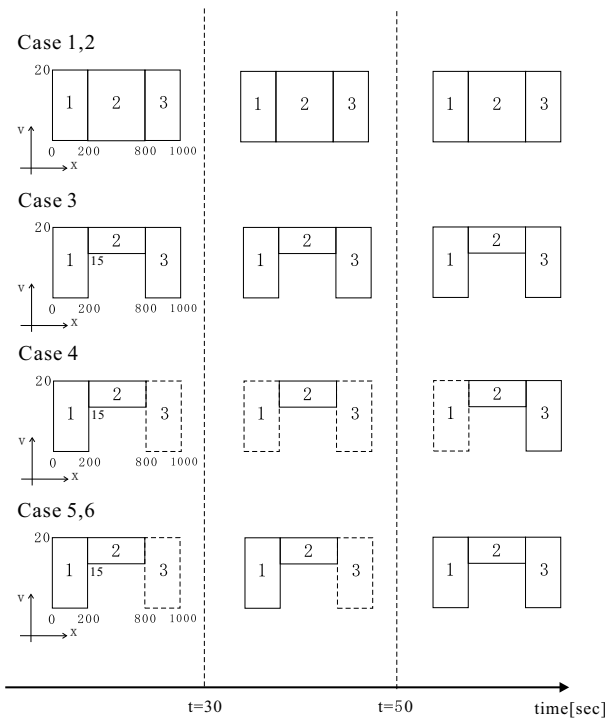


図 6 許容領域のパターン

Fig. 6. The patterns of admissible region

存在しない路線を走行する列車において、提案手法により消費エネルギー量を最小化計算を行い、その有用性を確認する。図 6 は、各ケースにおける時間ごとの状態空間を示して、各部分領域中央の数字は、該当領域の部分領域番号である。これらのケースにおける最適化結果を表 2 に、その時の運転曲線および制御入力を、図 7 に示す。表 2 で、 $(\Delta x_i, \Delta v_i)$  は、図 6 の  $i$  番目の部分領域における、列車位置・速度の分割幅を表している。

最適化結果の中で Case1 は、状態空間全域において分割幅を細かくとったもので、最大力行・惰行・電気ブレーキによる最大減速の 3 領域からなるブレーキ摩擦によるエネルギー損失を生じない範囲で最大速度を最小にするような消費エネルギー最小運転法の定性的理論に沿う運転曲線が得られており<sup>(2)</sup>、動的計画法による求解法の妥当性を与え

表 2 単純な路線状況下における最適化結果  
Table 2. Optimization results in simple track profile

|                            | Case 1          | Case 2, 3, 4, 5 | Case 6          |
|----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $(\Delta x_1, \Delta v_1)$ | (0.625, 0.0625) | (2.5, 1.25)     | (2.5, 1.25)     |
| $(\Delta x_2, \Delta v_2)$ | (0.625, 0.0625) | (2.5, 1.25)     | (2.5, 1.25)     |
| $(\Delta x_3, \Delta v_3)$ | (0.625, 0.0625) | (0.625, 0.0625) | (0.625, 0.0625) |
| $x(T)$ [m]                 | 999.61          | 999.67          | 999.50          |
| $v(T)$ [m/sec]             | 0.0281          | 0.0212          | 0.0522          |
| $J$ [MJ]                   | 33.51           | 33.59           | 33.58           |
| computation                |                 |                 |                 |
| time[sec]                  | 282             | 83, 68, 28, 32  | 5               |

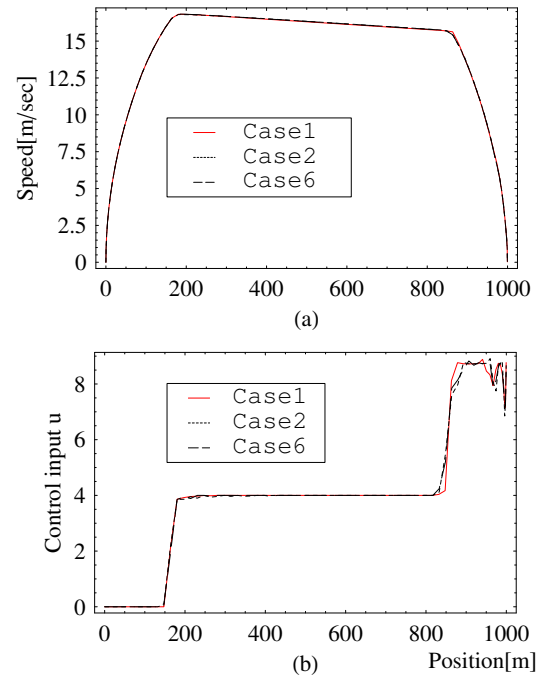


図 7 異なる手法により得られた最適化結果の比較 (a) 運転曲線, (b) 制御入力

Fig. 7. Comparison between optimization results with various numerical methods (a)run-curve, (b)control input

ていると同時に、精度の高い解を与えていると考えられる。故に、本節における誤差ならびに計算量評価は、Case1 を基準としている。全てのケースにおいて、終端付近での分割幅の比と評価関数 (5) におけるペナルティ係数  $c_1, c_2$  の比を、列車位置・速度の誤差量を同等に扱うという意味で  $\Delta x/\Delta v = c_2/c_1$  が等しくなるようにとり、調整を要するペナルティパラメータを 1 つとする効率化を行った。

細かい分割幅を終端付近に限定した Case2 は基準値と比較して、最終的な総消費エネルギーの誤差が 0.2 % とほぼ遜色のない結果が得られた。このような結果が得られる理由は、Bellman の最適性条件による<sup>(12)</sup>。状態空間に空間的制限を施した Case3、それに時間的制限を加えた Case4 においては、それぞれ 75.9 % , 90.1 % の計算時間の削減を実現した。終端付近にのみ時間的制限を与えた Case5 にお

いて、計算時間の効率化の割合は 88.7 % であり、Case4 との大きな差は見られなかった。複雑な実路線への応用を考慮した場合には、状態空間の時間的変化をうまく与えることが困難であり、Case5 のような単純な与え方は実用的であるといえる。Case6 は、メモリ利用による計算時間短縮を図ったものだが、この時、計算時間が 98.2 % 減と効果が大きかった。終端値に関して、解法による相違があるように思えるが、全て同一の小分割領域内の点であり、終端誤差としては、同等であると考えられる。

4.2 現実問題への応用 図 8 に与えられるような路線プロファイルにおいて、列車は、駅間距離 2180[m] を 168[sec] で走行するとする。このとき提案手法によるエネルギー最小化計算により、総エネルギー消費量 53.92[MJ]、終端位置誤差 0.46[m]、終端速度 0.0266[m/sec] を得た。列車位置・速度の時間的予想が困難なため、状態空間の時間的制限が与えにくく、計算時間を多く必要とするケースであるが、34[sec] で最適解が得られた。7.0[m/sec] のところは一定速度となっているが、厳しい速度制限では時間損失が大きく、ここを惰行ではなく制限速度で定速走行することにより、ピーク速度を下げた走行抵抗によるエネルギー損失を下げていると解釈できる。これは、解の妥当性を示すものといえる。終端条件を満たすために停止寸前に表れるチャタリング、あるいは所要時間にほとんど影響がないために表れやすい高速域のチャタリングに関しては、離散化誤差によるものであると考えられる。解決は容易ではないが、解の傾向を知るには本質的に問題となる現象ではないので、本稿では十分最適に近い解であるとみなした。

## 5. まとめ

本稿では、列車最適制御問題に動的計画法を応用した手法を提案した。まず、単純な路線状況下での数値例を挙げることで各種パラメータの検証を行い、次に、現実の複雑な路線プロファイルに適用しても、短時間で安定的に最適化計算が可能であることを示した。今後は本手法により、ケーススタディを行い列車の最適運転法に関する知見を得て、饋電電圧変動を考慮に入れた、複数列車の最適化を行うことが課題となる。

## 文 献

- (1) 渡辺 典秋：「ドライブレス運転の現状と将来展望」，鉄道車両と技術，No.86，pp10—17，(2003-6)
- (2) S.Sone: "Optimisation of Regenerative Train Operation - Pt.1 Contents of "Optima""，JIASC2001, Vol.3, pp1281-1284 (in Japanese)  
 首根 悟：「電力回生車の最適運転法 — その 1『最適』の内容」，平成 13 年電気学会産業応用部門大会，pp1281-1284
- (3) 高木 亮：「直流饋電系と列車群制御の統合インテリジェントシステム化」，東京大学学位論文 (1994)
- (4) E.Khmelnitsky："An Optimal Control Problem of Train Operation"，IEEE Trans. on Automatic Control, vol.45, No.7, 1257-1266 (2000-7)
- (5) R.Bellman, R.Kalaba："Dynamic programming and modern control theory"，Academic Press(1964)

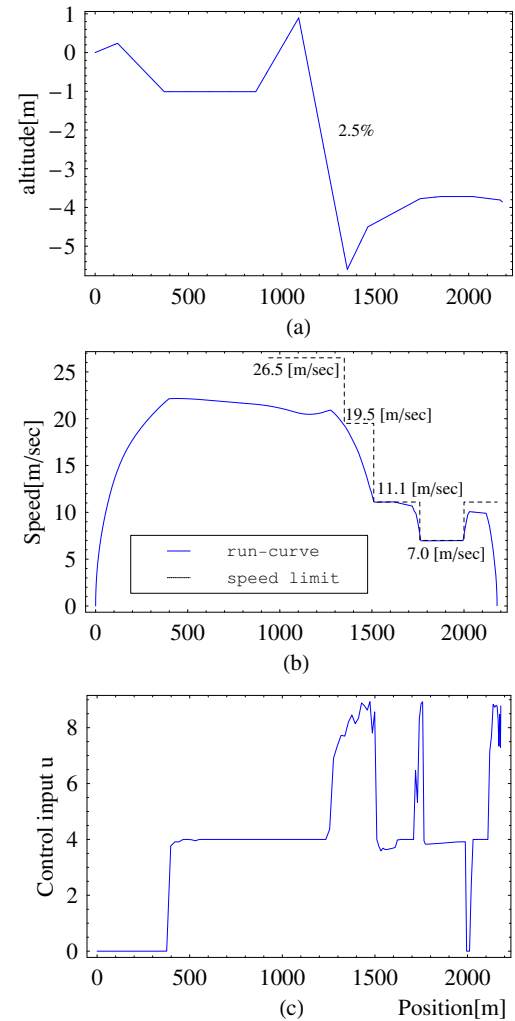


図 8 複雑な路線プロファイルにおける最適化結果 (a) 勾配，(b) 運転曲線，(c) 制御入力

Fig. 8. Complicated track profile (a) altitude, (b) run-curve, (c) control input

- (6) 杉山 昌平：「動的計画法」，日科技連出版社 (1976)
- (7) T.Koseki, C.Yeo: "Application of the Dynamic Programming to a Calculation of Optimal Energy-Saving Running Profile of a Train and Problems in its Numerical Implementation"，The Papers of Joint Technical Meeting on Transportation and Electric Railway and Linear Drives IEEJ, pp5-10 (2002-7) (in Japanese)  
 古関 隆章，姚 景倩：「省エネルギー運転曲線最適化への動的計画法の応用とその数値解法」，平成 14 年度電気学会交通・電気鉄道・リニアドライブ合同研究会，pp5-10(2002-7)
- (8) C.Yeo, T.Koseki: "Optimization of Running Profile of Train by Dynamic Programming"，National Convention of IEEJ, vol.3, pp85-86(2002-3)
- (9) 飯田 秀樹，加我 敦：「インバータ制御電車概論」，電気車研究会 (2003)
- (10) 電気学会編：「最新電気鉄道工学」，コロナ社 (2000)
- (11) Hideyoshi Ko, Takafumi Koseki, Masafumi Miyatake: "Application of Dynamic Programming to Optimization of Running Profile of A Train"，COMPRAIL2004,103-112
- (12) H.Ko, T.Koseki, M.Miyatake: "Numerical Algorithm Employing Dynamic Programming for Optimization of Train Running Profile"，National Convention of IEEJ, vol.4, pp256-257 (2004-3) (in Japanese)  
 高 英聖，古関 隆章，宮武 昌史：「動的計画法による列車運転曲線最適化問題の数値解法」，平成 16 年電気学会全国大会，vol.4, pp256-257